第19講　実数解条件と体積

19

［A］　a を $0<a<\frac{1}{4}$ を満たす実数とする．xy 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

［B］　座標空間において，平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1，平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2 とする．また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，円 C_1 上を動く点Qと P の距離の最小値を m，円 C_2 上を動く点Rと P の距離の最大値を M とする．次の問いに答えよ．

(1)　$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ．

(2)　$|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする．図形 H の体積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　実数解条件と体積

19　$V=\{(x,\ y,\ z)|(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2\leqq 1\}$ とする.

(1)　V の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ.

(2)　V の体積を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　実数解条件と体積

19

［A］ a を $0<a<\frac{1}{4}$ を満たす実数とする．xy 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

［B］ 座標空間において，平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1，平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2 とする．また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，円 C_1 上を動く点Qと P の距離の最小値を m，円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M とする．次の問いに答えよ．

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ．

(2) $|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする．図形 H の体積を求めよ．

【答】 ［A］ $\frac{\pi^2}{4}(1-4a)$

［B］ (1) $m=\sqrt{(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2}$，$M=\sqrt{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2}$ 　(2) $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

【解説】

［A］

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$
$$\iff x^4-x^2+y^2+a\leqq 0$$
$$\iff \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}-a-y^2$$

この x が実数解をもつ条件は

$$\frac{1}{4}-a-y^2\geqq 0 \qquad \therefore\ -\sqrt{\frac{1}{4}-a}\leqq y\leqq \sqrt{\frac{1}{4}-a}$$

となるが，この条件のもとで，$\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2}<\frac{1}{2}$ に注意すると

$$\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2}\leqq x^2\leqq \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a-y^2}$$

と解くことができる．ここで $\sqrt{\frac{1}{4}-a}=\alpha$ とおくと，求める体積 V は

$$V=\int_{-\alpha}^{\alpha}\pi\left\{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\alpha^2-y^2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha^2-y^2}\right)\right\}dy$$
$$=2\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-y^2}\,dy$$

$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\alpha^2-y^2}\,dy$ は半径 α の円の面積の $\frac{1}{2}$ を表すので

$$V=2\pi\cdot\pi\alpha^2\times\frac{1}{2}$$
$$=\alpha^2\pi^2=\left(\frac{1}{4}-a\right)\pi^2=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}(1-4a)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］(1)　H_1，H_2 を

$$H_1(x,\ y,\ \sqrt{2}),\ H_2(x,\ y,\ -\sqrt{2})$$

とおくと，H_1，H_2 はそれぞれ P から 2 つの平面 $z=\sqrt{2}$，$z=-\sqrt{2}$ に下ろした垂線の足である．ここで $C_1(0,\ 0,\ \sqrt{2})$，$C_2(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ とすると $C_1H_1=C_2H_2=r$ より，Q と H_1 との最小値は $|r-\sqrt{2}|$ であるので三平方の定理より

$$m^2=|r-\sqrt{2}|^2+|z-\sqrt{2}|^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{m=\sqrt{(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2}}$$

同様に R と H_2 の最大値は $r+\sqrt{2}$ であるので

$$M^2=(r+\sqrt{2})^2+|z-(-\sqrt{2})|^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{M=\sqrt{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2}}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&|M-2\sqrt{6}|\geqq m\\
\iff\ &|M-2\sqrt{6}|^2\geqq m^2\\
\iff\ &M^2-4\sqrt{6}M+24\geqq m^2\\
\iff\ &M^2-m^2+24\geqq 4\sqrt{6}M\\
\iff\ &4\sqrt{2}(z+r+3\sqrt{2})\geqq 4\sqrt{6}M\\
\iff\ &(z+r+3\sqrt{2})^2\geqq 3M^2 \text{ かつ } z+r+3\sqrt{2}\geqq 0\\
\iff\ &\begin{cases} z^2+r^2-rz-3\leqq 0 & \cdots\cdots① \\ z+r+3\sqrt{2}\geqq 0 & \cdots\cdots② \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで① $\iff r^2-zr+z^2-3\leqq 0$ より，この r に関する不等式は $-2\leqq z\leqq 2$ のときに実数解 $\dfrac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\leqq r\leqq\dfrac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}$ をもつが，$r=\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0$ であることと，

$-2\leqq z<-\sqrt{3}$ のとき $\dfrac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}<0$，$-\sqrt{3}\leqq z\leqq 2$ のとき $\dfrac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\geqq 0$ となり，$-2\leqq z<\sqrt{3}$ のとき $\dfrac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}<0$，$\sqrt{3}\leqq z\leqq 2$ のとき $\dfrac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\geqq 0$

より，不等式①は

$|z|\leqq\sqrt{3}$ のとき

$$0\leqq r\leqq\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}$$

$\sqrt{3}<z\leqq 2$ のとき

$$\frac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\leqq r\leqq\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}$$

であるので，求める体積は

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi\left(\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\right)^2dz$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^{2}\pi\left\{\left(\frac{z+\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\sqrt{3(4-z^2)}}{2}\right)^2\right\}dz$$

$$=\pi\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(3-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z\sqrt{12-3z^2}\right)dz+\int_{\sqrt{3}}^{2}z\sqrt{12-3z^2}\,dz\right\}$$

$$=\pi\left\{\int_{0}^{\sqrt{3}}(6-z^2)dz+\int_{\sqrt{3}}^{2}z\sqrt{12-3z^2}\,dz\right\}$$

$$=\pi\left\{\left[6z-\frac{1}{3}z^3\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{9}(12-3z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{3}}^{2}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　実数解条件と体積

19　$V=\{(x,\ y,\ z)|(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2\leqq 1\}$ とする．

(1)　V の平面 $z=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．

(2)　V の体積を求めよ．

【答】 (1) $8\pi\sqrt{1-t^2}$ $(-1\leqq t\leqq 1)$　(2) $4\pi^2$

【解説】

(1)　$z=t$ を代入すると，

$$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+t^2\leqq 1$$

$$\iff (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2\leqq 1-t^2$$

以下 $-1\leqq t\leqq 1$ という条件のもとで $\sqrt{1-t^2}\leqq 1$ に注意すると

$$\iff -\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}-2\leqq\sqrt{1-t^2}$$

$$\iff 2-\sqrt{1-t^2}\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq 2+\sqrt{1-t^2}$$

$$\iff (2-\sqrt{1-t^2})^2\leqq x^2+y^2\leqq(2+\sqrt{1-t^2})^2$$

よって切り口は半径が $R=2+\sqrt{1-t^2}$，$r=2-\sqrt{1-t^2}$ で中心が原点である 2 つの同心円の間の部分となるので，その面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned}S(t)&=\pi R^2-\pi r^2\\&=\pi(R+r)(R-r)\\&=\mathbf{8\pi\sqrt{1-t^2}}\ \ (-1\leqq t\leqq 1)\end{aligned}$$

(2)　(1)より V の体積は

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}8\pi\sqrt{1-t^2}\,dt\\&=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt\\&=8\pi\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\mathbf{4\pi^2}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。